

**Флуктуационная теория фазовых  
переходов II рода на примере  
сверхпроводимости**

**С.В. Миронов**

# План семинара

1. Примеры фазовых переходов II рода. Параметр порядка.
2. Феноменологическое описание фазовых переходов II рода.  
Теория Гинзбурга-Ландау.
3. Основные идеи флуктуационной теории фазовых переходов II рода.
4. Влияния флуктуаций на характеристики сверхпроводников.
5. Выводы.

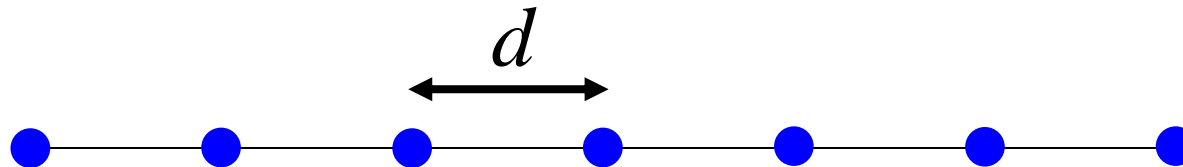
# Фазовый переход II рода

ФП II рода:

Непрерывное изменение параметров



Скачкообразное изменение симметрии



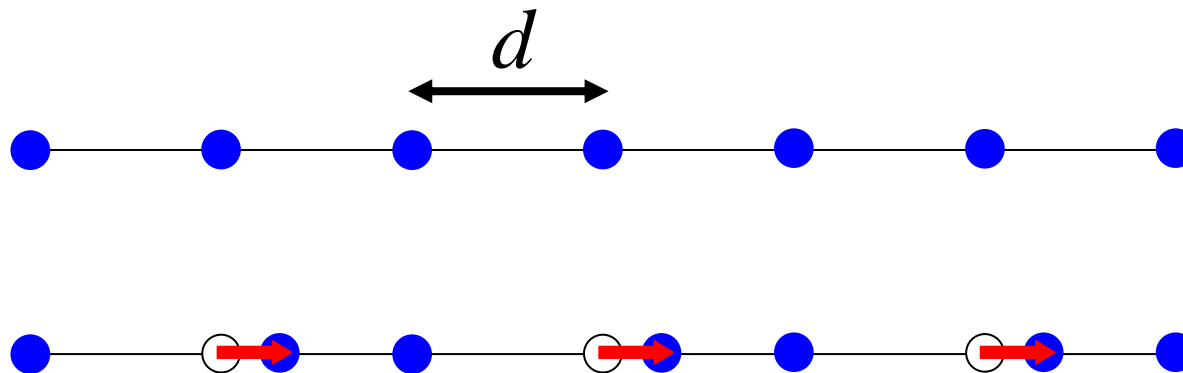
# Фазовый переход II рода

ФП II рода:

Непрерывное изменение параметров



Скачкообразное изменение симметрии



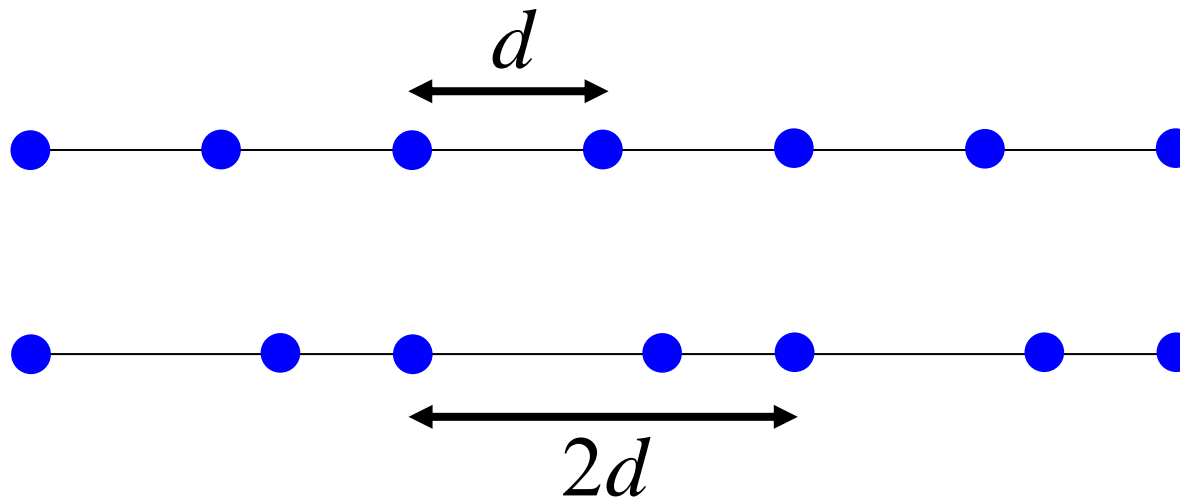
# Фазовый переход II рода

ФП II рода:

Непрерывное изменение параметров



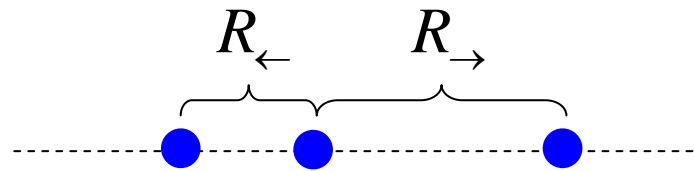
Скачкообразное изменение симметрии



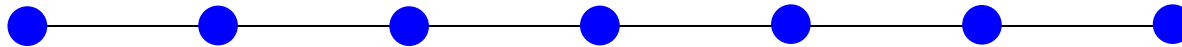
**Удвоение периода**

(понижение симметрии)

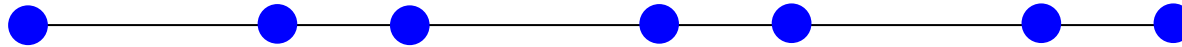
# Параметр порядка



$$\eta = |R_{\rightarrow} - R_{\leftarrow}|$$



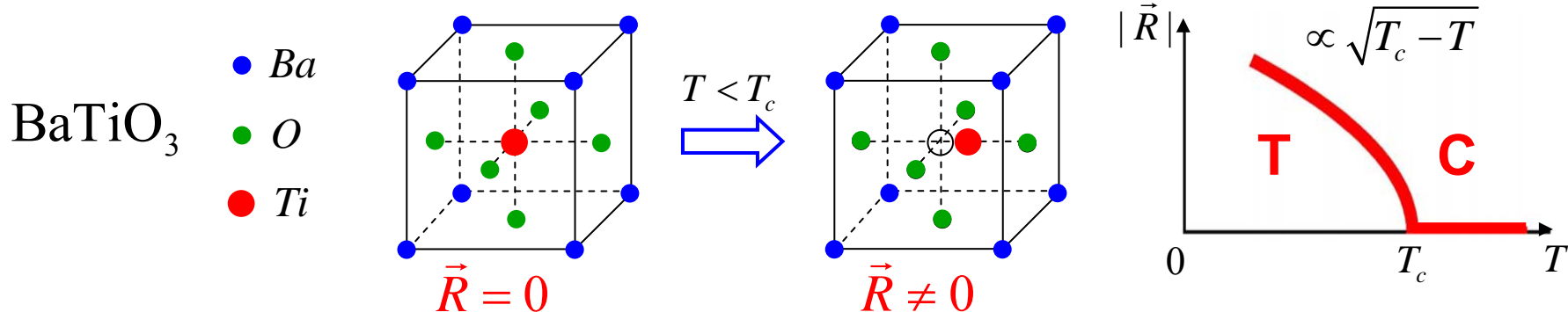
$$\eta = 0$$



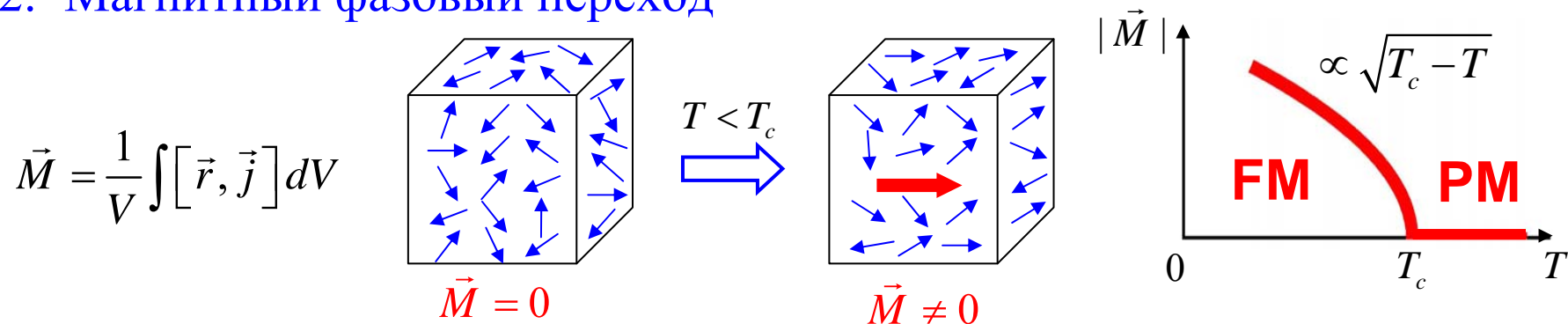
$$\eta \neq 0$$

# Примеры фазовых переходов II рода

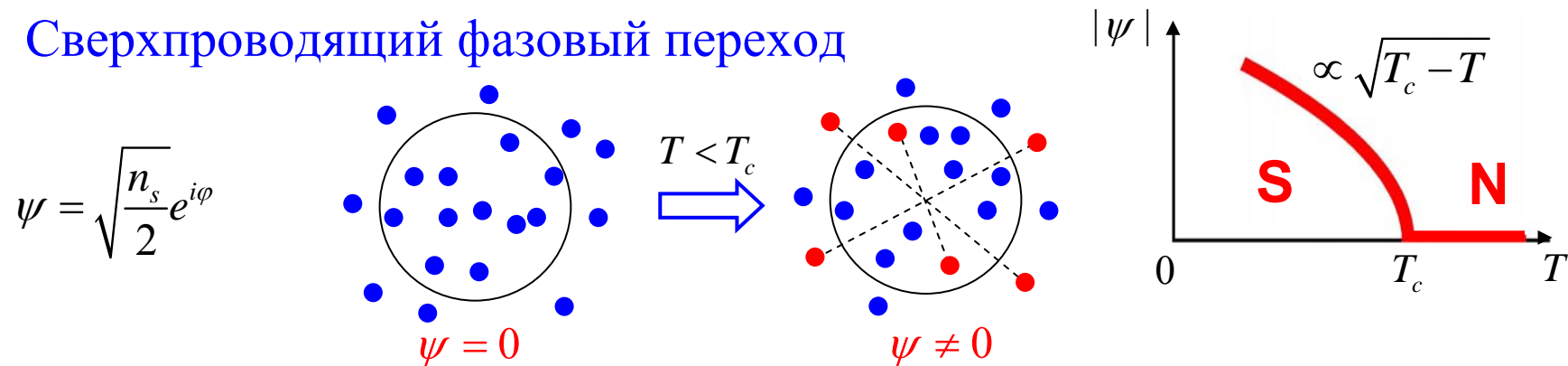
## 1. Некоторые типы структурных переходов в кристаллах



## 2. Магнитный фазовый переход



## 3. Сверхпроводящий фазовый переход

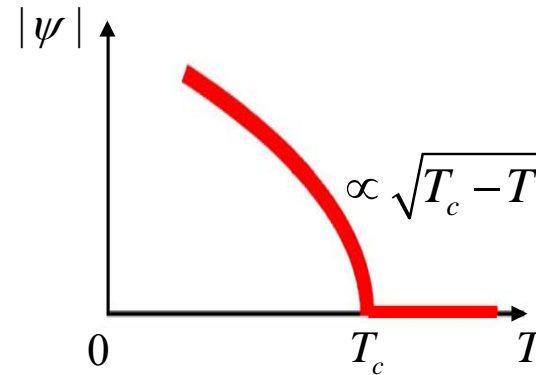
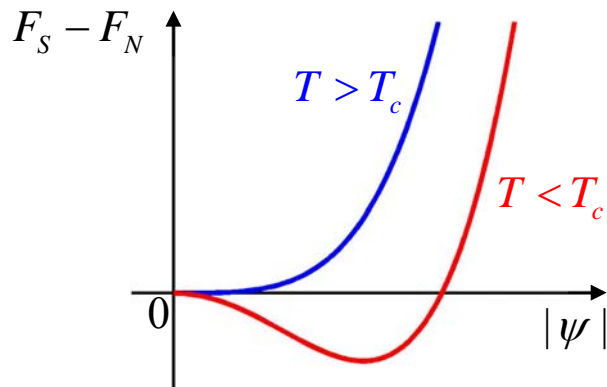


# Теория Гинзбурга-Ландау

$$F(T, V) \Rightarrow F(T, V, \psi)$$

1. Калибровочная инвариантность в N фазе
2. Наличие фазового перехода II рода
3. Пространственная однородность

$$|T - T_c| \ll T_c \Rightarrow F_S(T, V, \psi) = F_N(T, V) + V \left\{ \alpha(T - T_c)|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \dots \right\}$$



Равновесие:  $\frac{\partial F_S[\psi]}{\partial \psi^*} = 0$

$$\alpha(T - T_c)\psi + \beta|\psi|^2\psi = 0$$

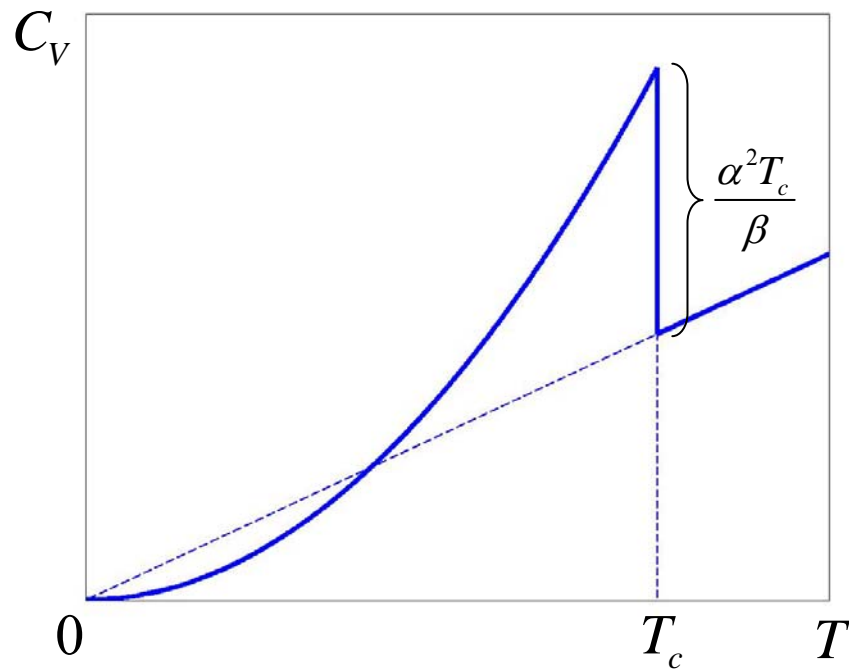
$$|\psi_p| = \begin{cases} 0 & T > T_{c0} \\ \sqrt{\frac{\alpha(T_c - T)}{\beta}} & T < T_{c0} \end{cases}$$



# Скачок теплоемкости

$$F_S(\psi_p) = F_N - \frac{\alpha^2 (T - T_c)^2}{2\beta}$$

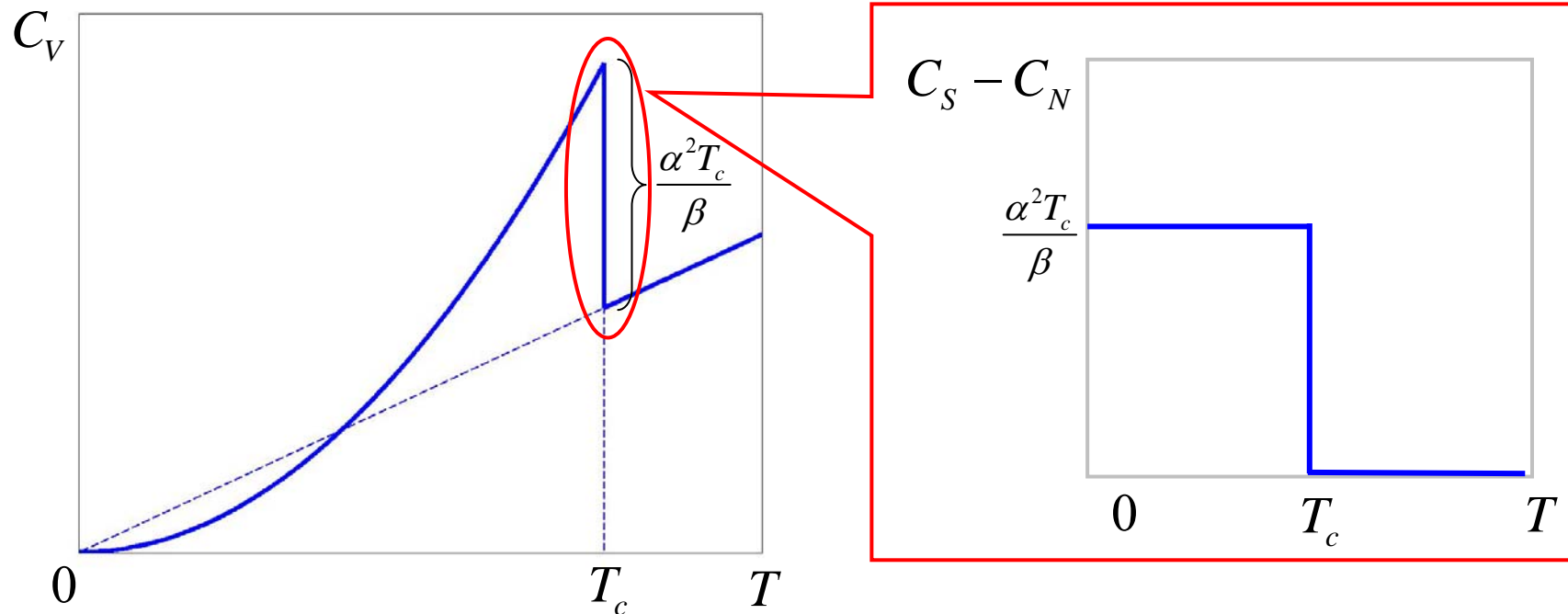
$$C_V = -T_c \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \quad T = T_c : C_S = C_N + \frac{\alpha^2 T_c}{\beta}$$



# Скачок теплоемкости

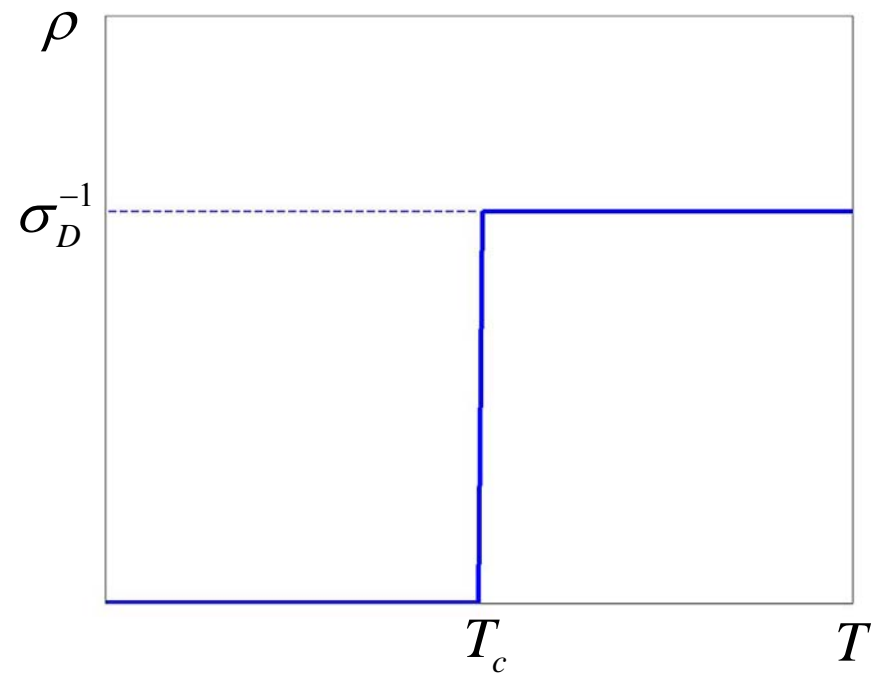
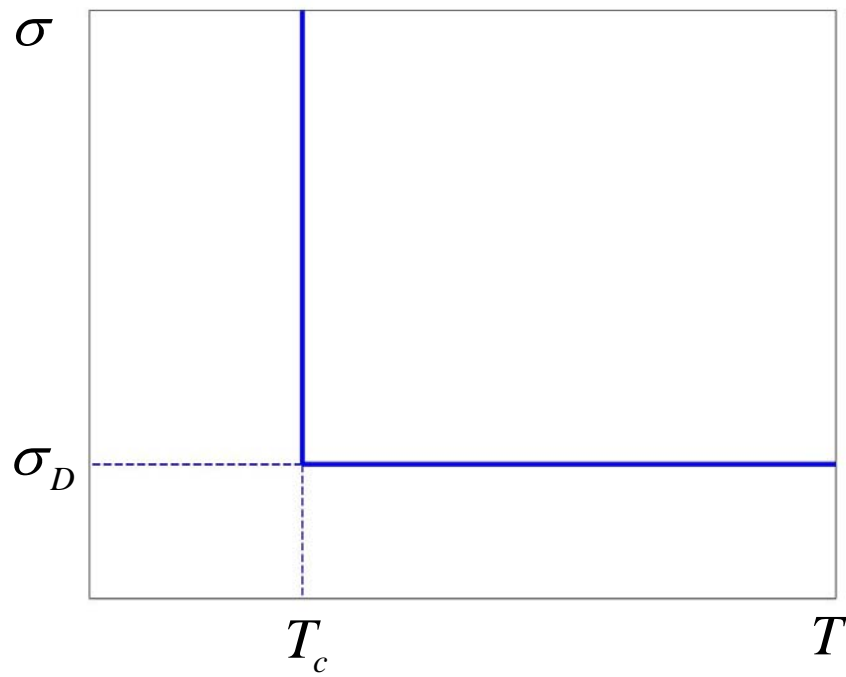
$$F_S(\psi_p) = F_N - \frac{\alpha^2 (T - T_c)^2}{2\beta}$$

$$C_V = -T_c \left( \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_V \quad T = T_c : C_S = C_N + \frac{\alpha^2 T_c}{\beta}$$

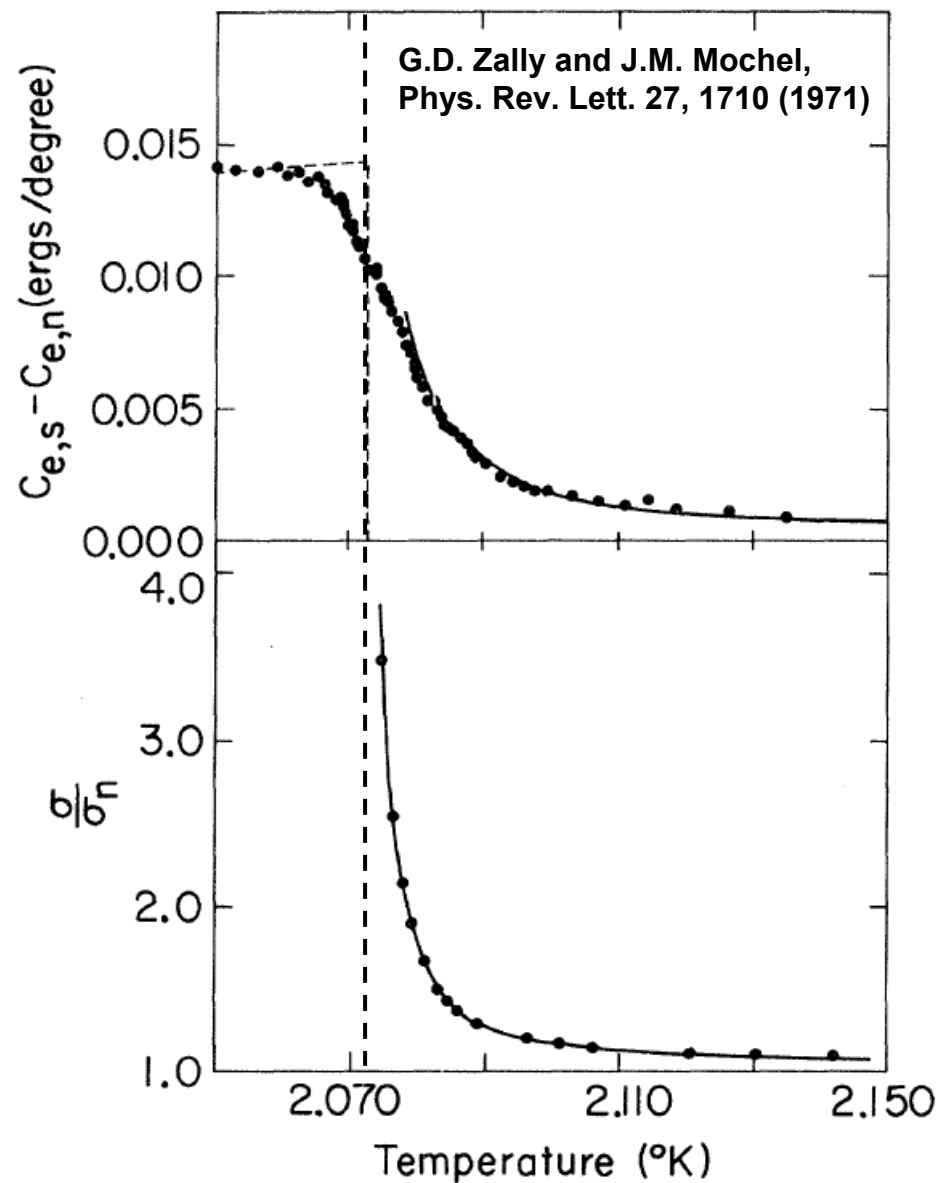
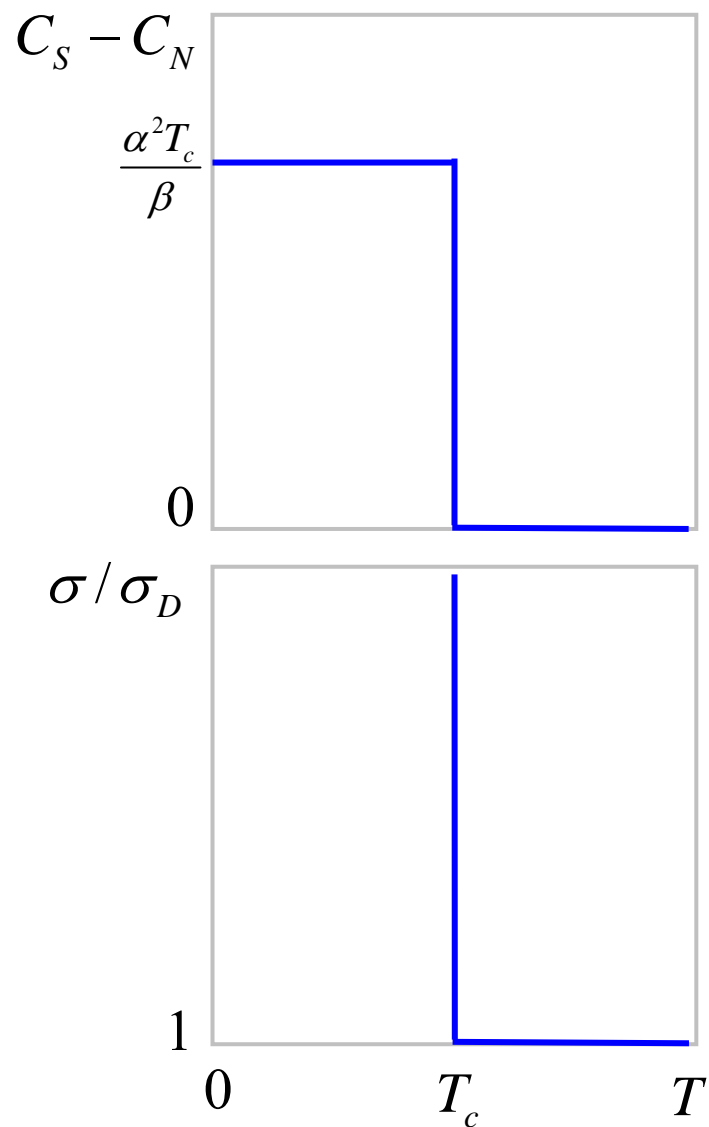


# Скачок проводимости

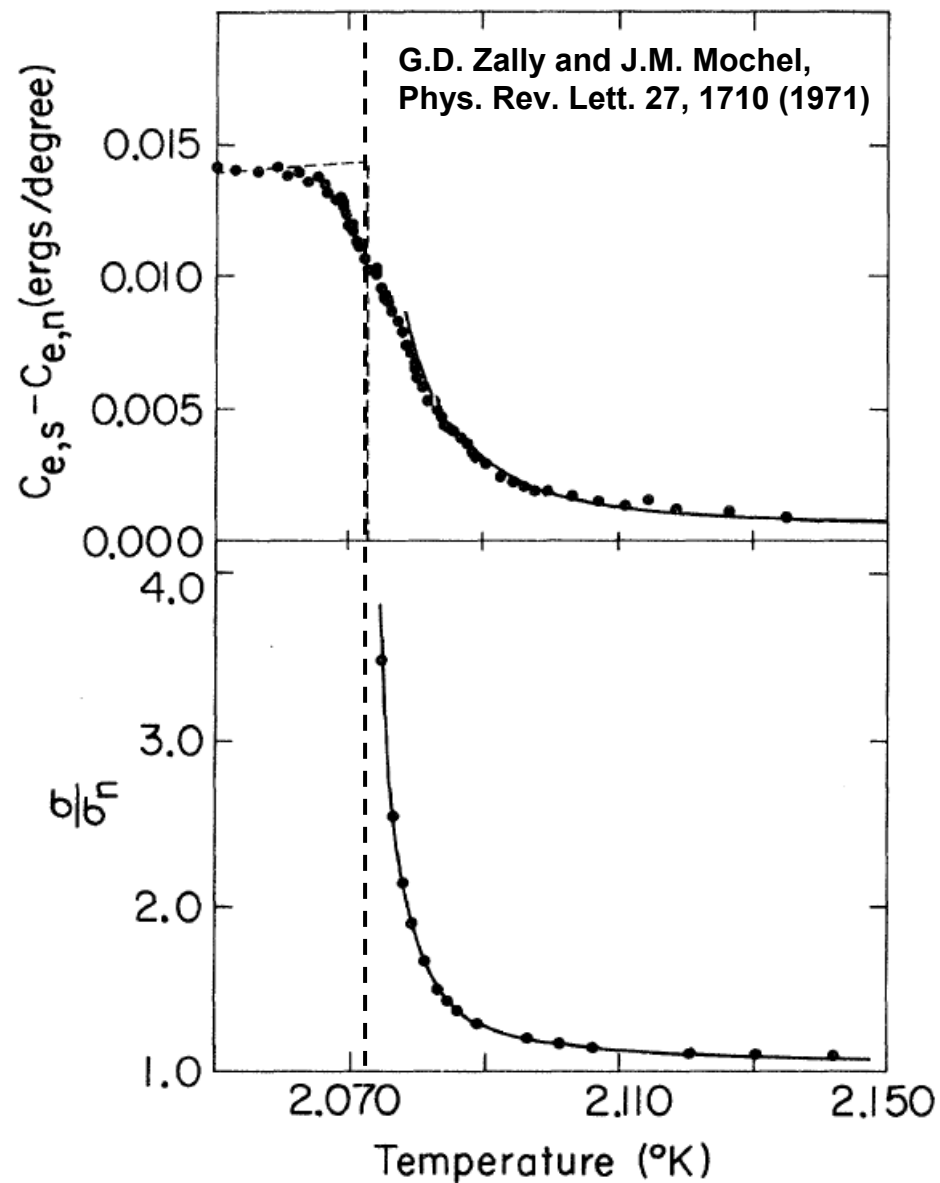
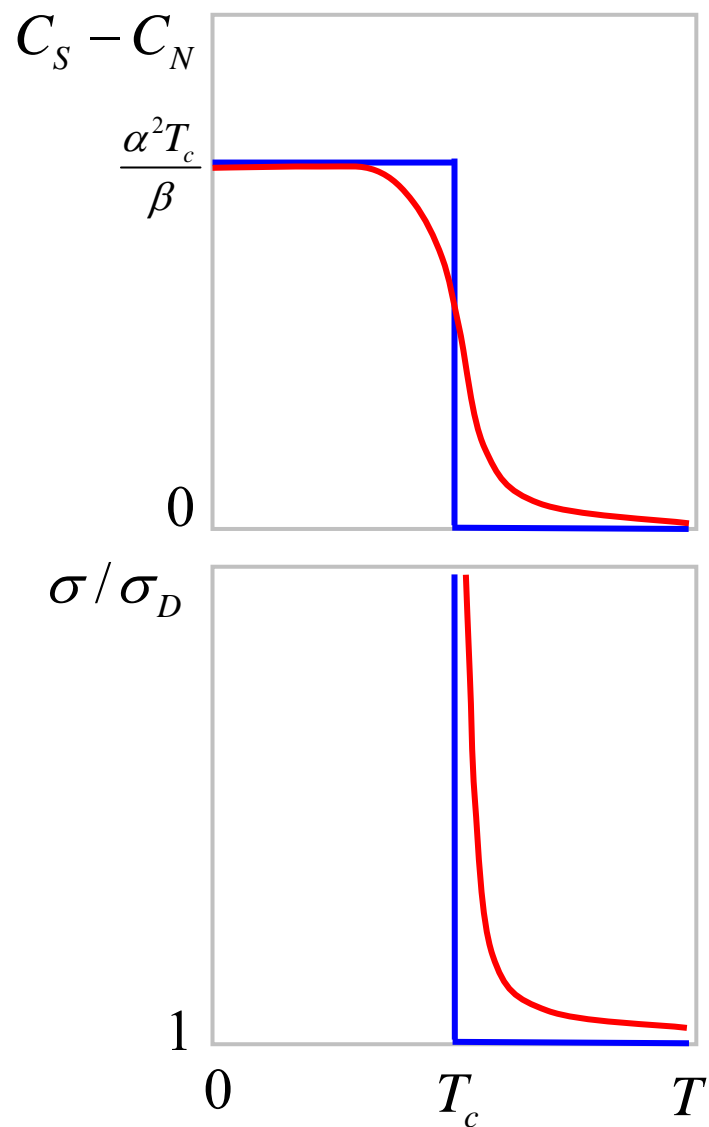
$$\sigma_N = \sigma_D = \frac{e^2 n \tau}{m}$$



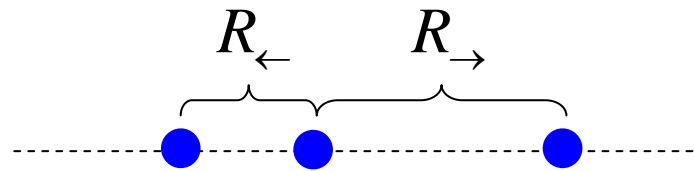
# Экспериментальные зависимости теплоемкости и проводимости от температуры



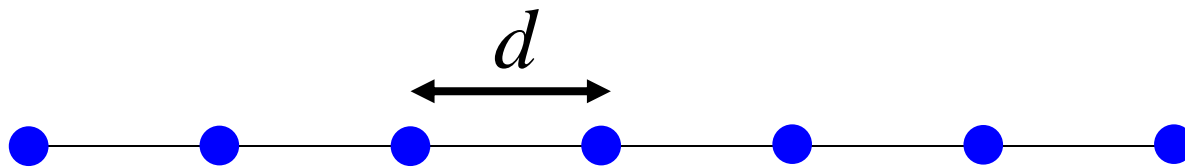
# Экспериментальные зависимости теплоемкости и проводимости от температуры



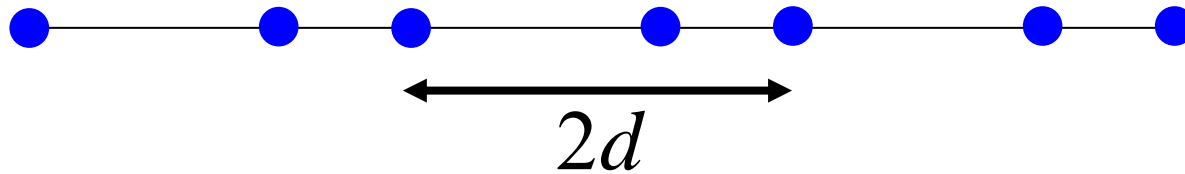
## Фазовый переход 2 рода: флуктуации



$$\eta = |R_{\rightarrow} - R_{\leftarrow}|$$

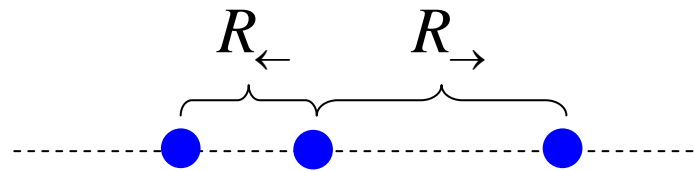


$$\eta = 0$$

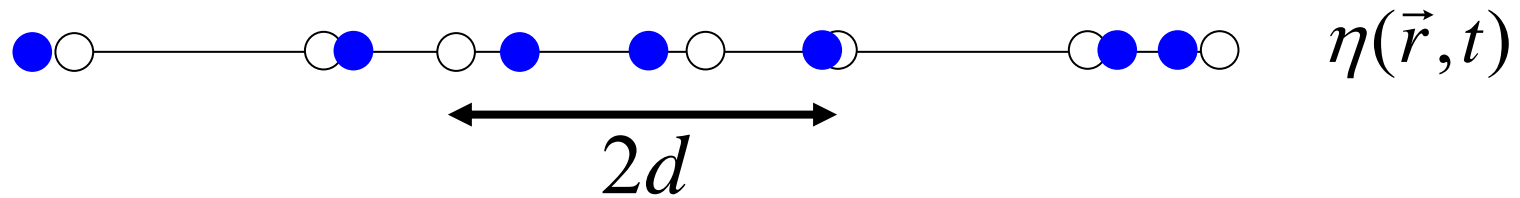
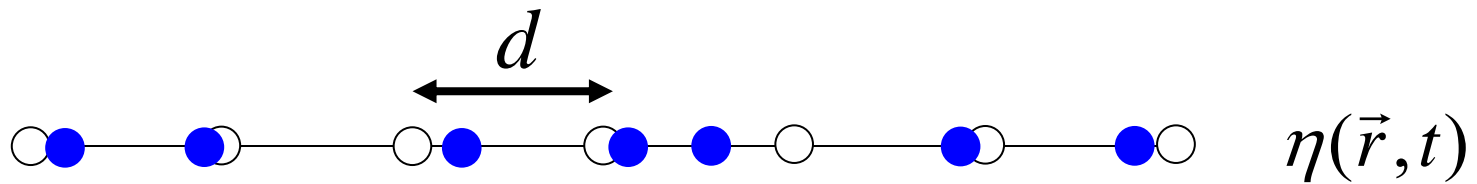


$$\eta = \eta_0 \neq 0$$

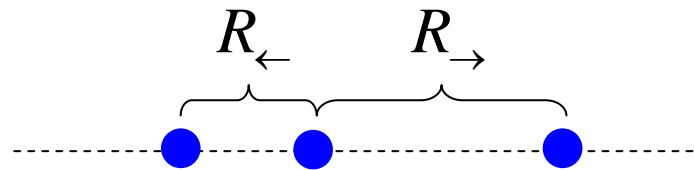
# Фазовый переход 2 рода: флуктуации



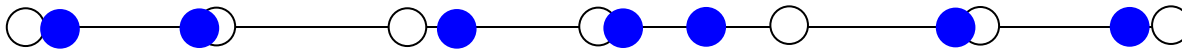
$$\eta = |R_{\rightarrow} - R_{\leftarrow}|$$



# Фазовый переход 2 рода: флуктуации



$$\eta = |R_{\rightarrow} - R_{\leftarrow}|$$



$$\eta(t) = \eta(\vec{r}, t) \neq 0$$



$$\langle \eta(\vec{r}, t) \rangle = 0$$



$$\eta(t) = \eta(\vec{r}, t) \neq \eta_0$$



$$\langle \eta(\vec{r}, t) \rangle = \eta_0$$

Теория Гинзбурга-Ландау: предположение о малости флуктуаций



# Идеи описания флуктуаций

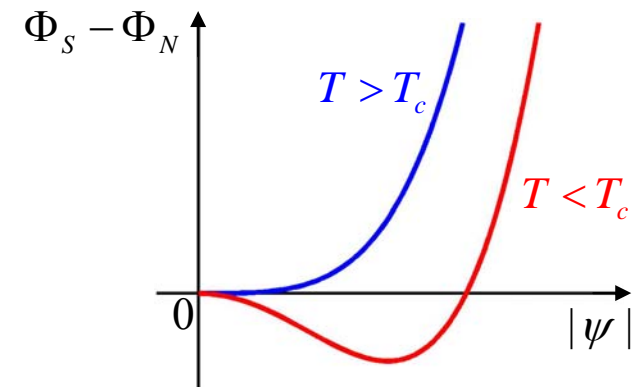
Малые сверхпроводящие гранулы:

$$F(\psi) = V \left\{ \alpha(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right\}$$

$$T > T_c \implies \psi = \psi_R + i\psi_I \quad w(\psi) \propto \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\}$$

$$G(T) = -T \ln \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\} d\psi_R d\psi_I$$

$$\langle Q(\psi) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\psi) \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\} d\psi_R d\psi_I}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\} d\psi_R d\psi_I}$$

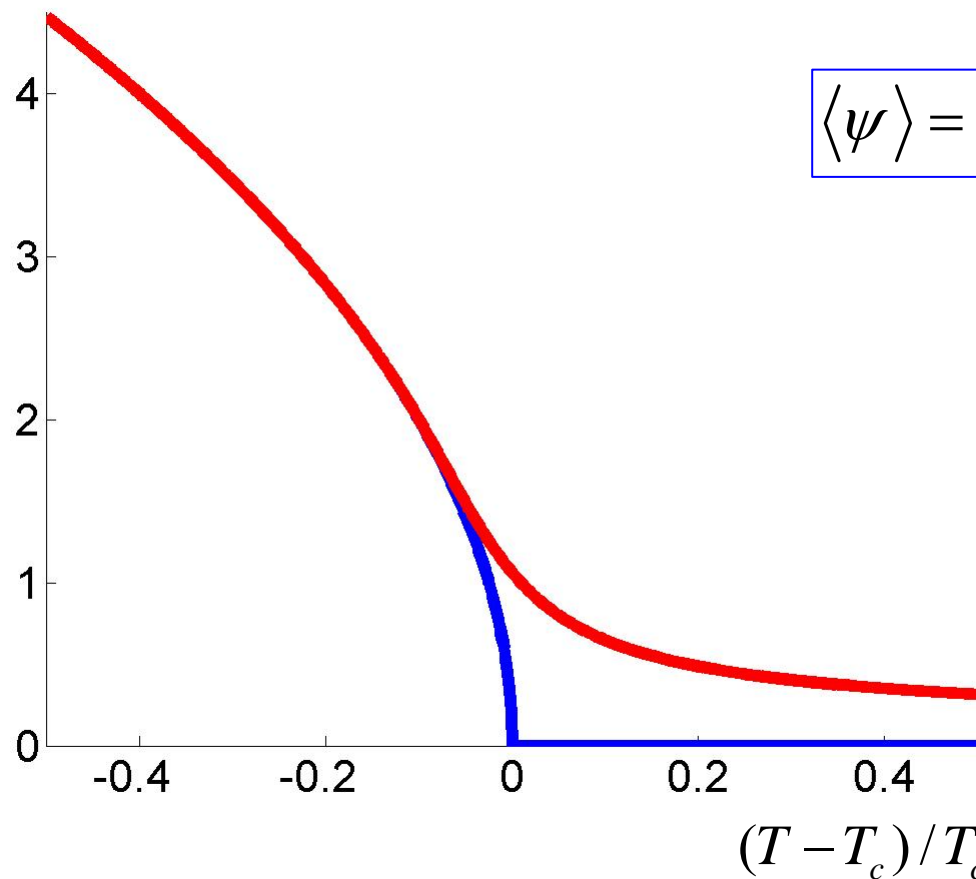


# Величина флуктуаций

$$F(\psi) = V \left\{ \alpha(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right\}$$

$$\langle Q(\psi) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\psi) \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\} d\psi_R d\psi_I}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\} d\psi_R d\psi_I}$$

$$\left( \frac{T_c}{2\beta V} \right)^{1/2} \sqrt{\langle |\psi|^2 \rangle}$$



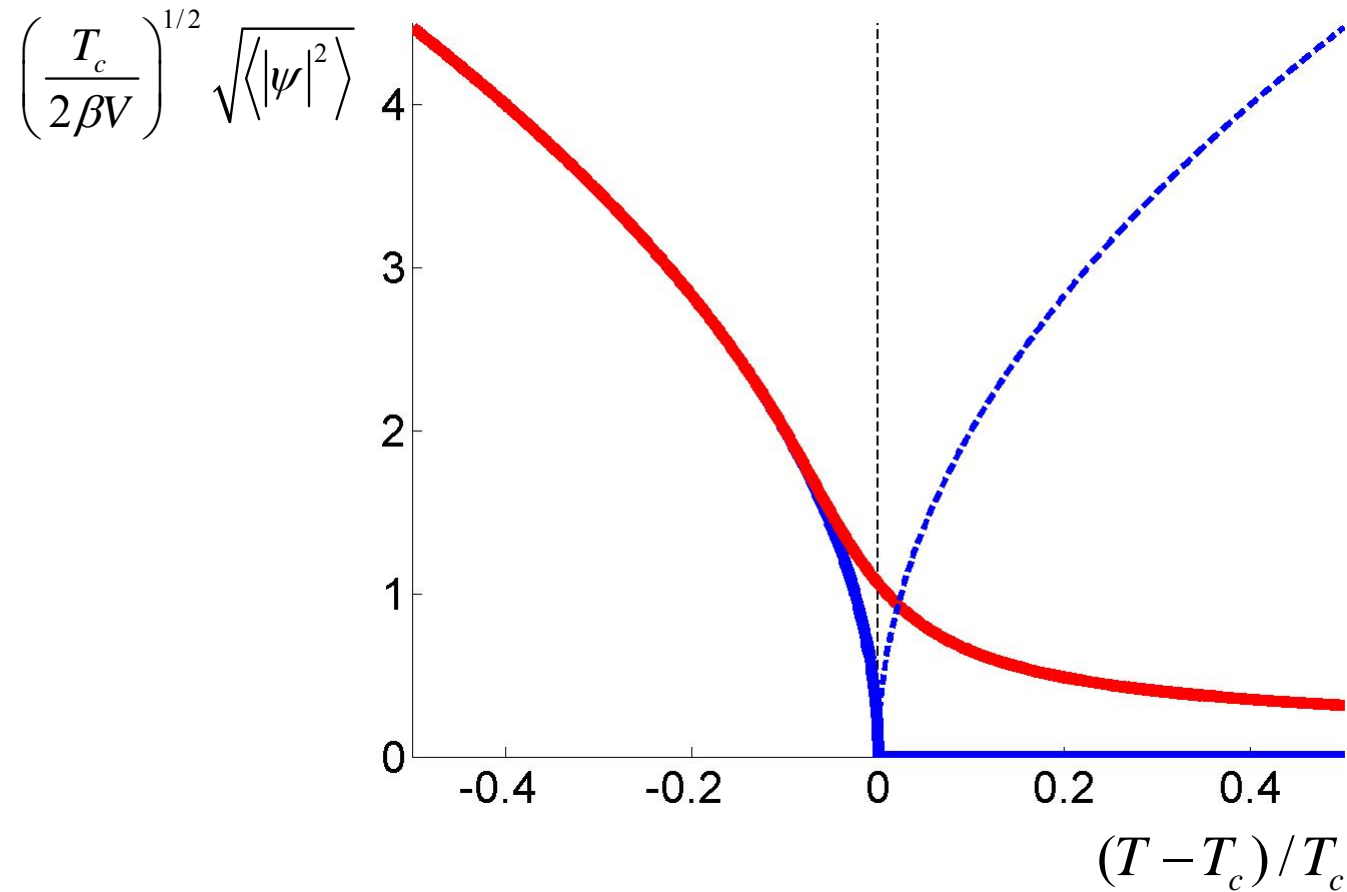
$$\langle \psi \rangle = \langle \psi_R \rangle + \langle i\psi_I \rangle = 0$$

$$\langle |\psi| \rangle = ?$$

# Границы применимости теории Гинзбурга-Ландау

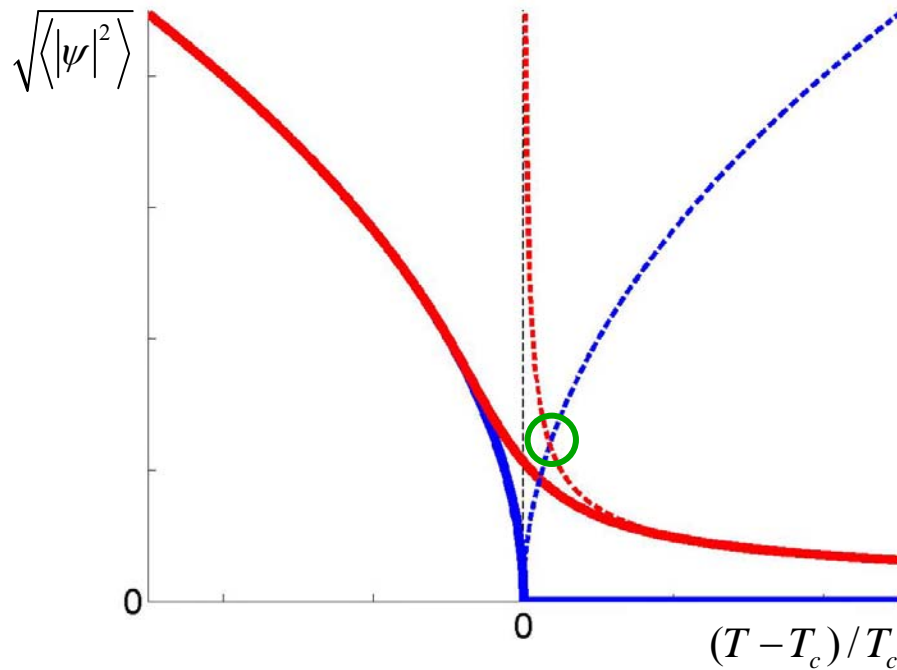
1.  $|T - T_c| \ll T_c$

2.  $\langle |\psi - \psi_p|^2 \rangle \ll |\psi_p|^2$  ?



# Критерий Гинзбурга-Леванюка

$$F(\psi) = V \left\{ \alpha(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right\}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots) d\psi_R d\psi_I = 2\pi \int_0^{\infty} (\dots) d|\psi|^2$$

$$\langle |\psi|^2 \rangle = \frac{T_c}{\alpha V (T - T_c)}$$

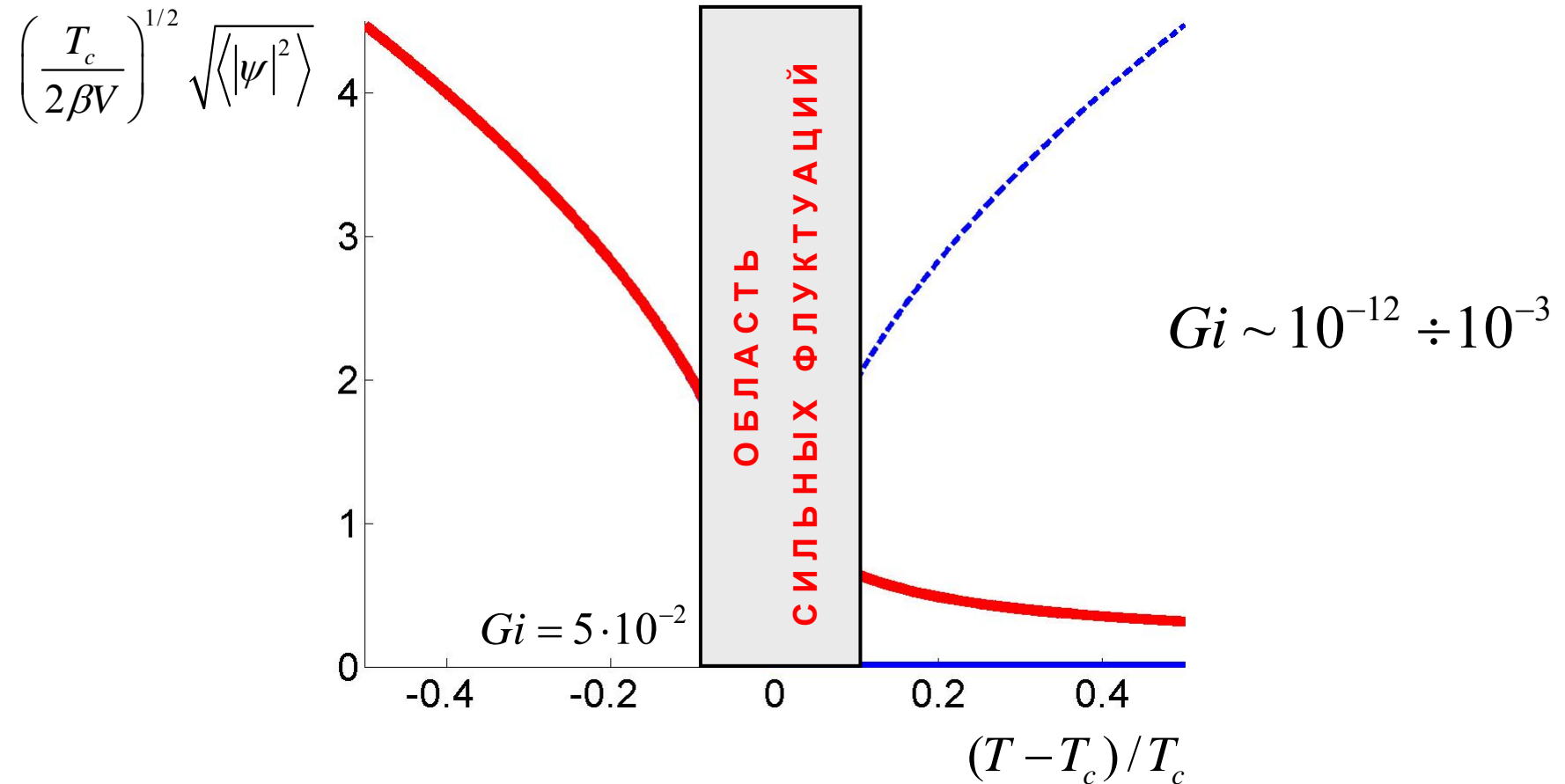
$$|\psi_p|^2 = \frac{\alpha |T - T_c|}{\beta}$$

$$|T - T_c| / T_c \gg Gi$$

$$Gi = \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha^2 T_c V}}$$

# Границы применимости теории Гинзбурга-Ландау

$$Gi \ll |T - T_c| / T_c \ll 1$$

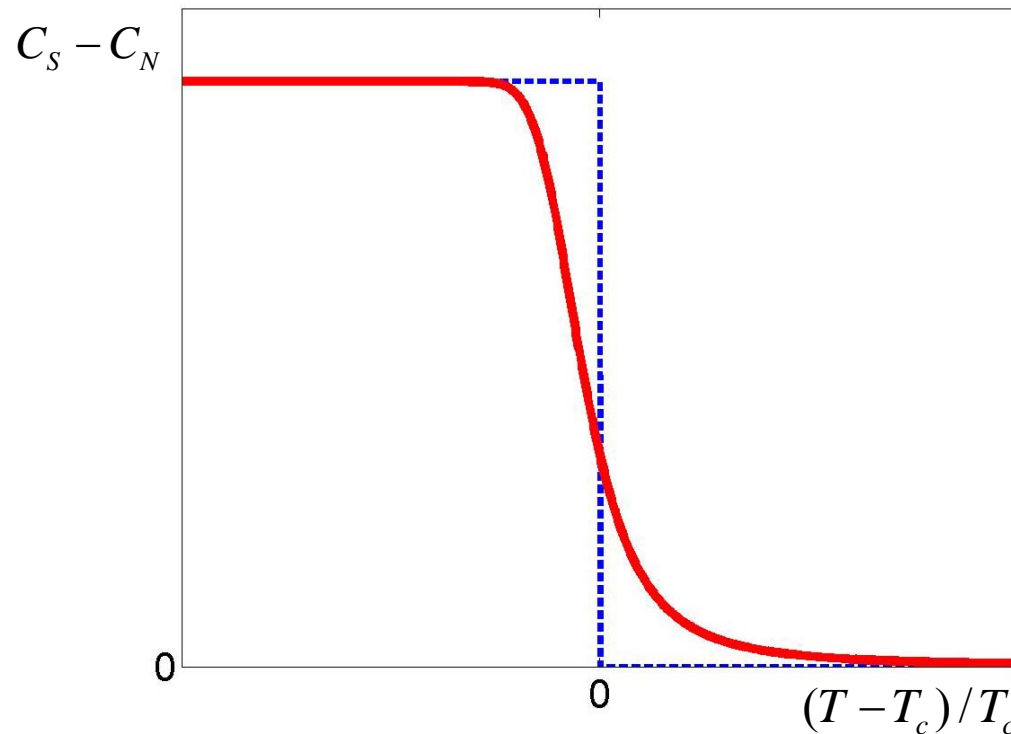


## Скачок теплоемкости

$$F(\psi) = V \left\{ \alpha(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right\} \quad G(T) = -T \ln \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\} d\psi_R d\psi_I$$

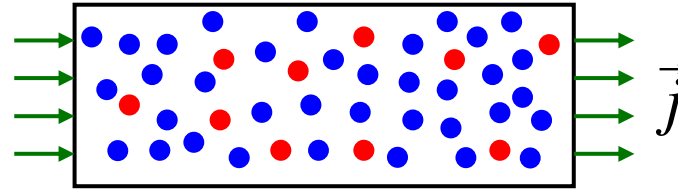
$$G(T) = -T \ln \left( \frac{4\pi}{\alpha V} \frac{1}{Gi} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -2 \frac{\varepsilon}{Gi} x - x^2 \right\} dx \right)$$

$$\varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$



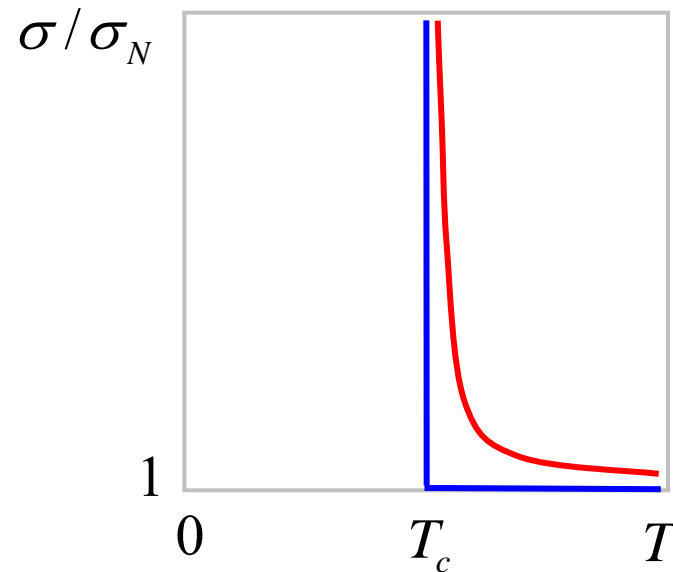
$$C_S - C_N = -T_c \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}$$

# Флуктуационная проводимость



$$n = n_N + n_S$$

$$\sigma_N = \frac{e^2 n_N \tau}{m} \quad \sigma_S = \frac{e^2 n_S \tau_S}{m}$$



$$\sigma = \sigma_N + \sigma_S$$

## Время жизни неравновесных куперовских пар

$$F(\psi) = V \left\{ \alpha(T - T_c) |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \right\} \quad w(\psi) \propto \exp \left\{ -\frac{F(\psi)}{T} \right\}$$

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{8}{\pi \alpha V} \frac{\delta F(\psi)}{\delta \psi^*}$$

$$\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{8}{\pi} (T - T_c) \psi - \beta |\psi|^2 \psi$$

$$\tau_s = \frac{\pi \hbar}{8(T - T_c)}$$



## Размер неравновесных куперовских пар

$$F[\psi(\vec{r})] = \int_V \left\{ \alpha(T - T_{c0}) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla \psi(\vec{r})|^2 + \frac{b}{2} |\psi(\vec{r})|^4 \right\} dV$$

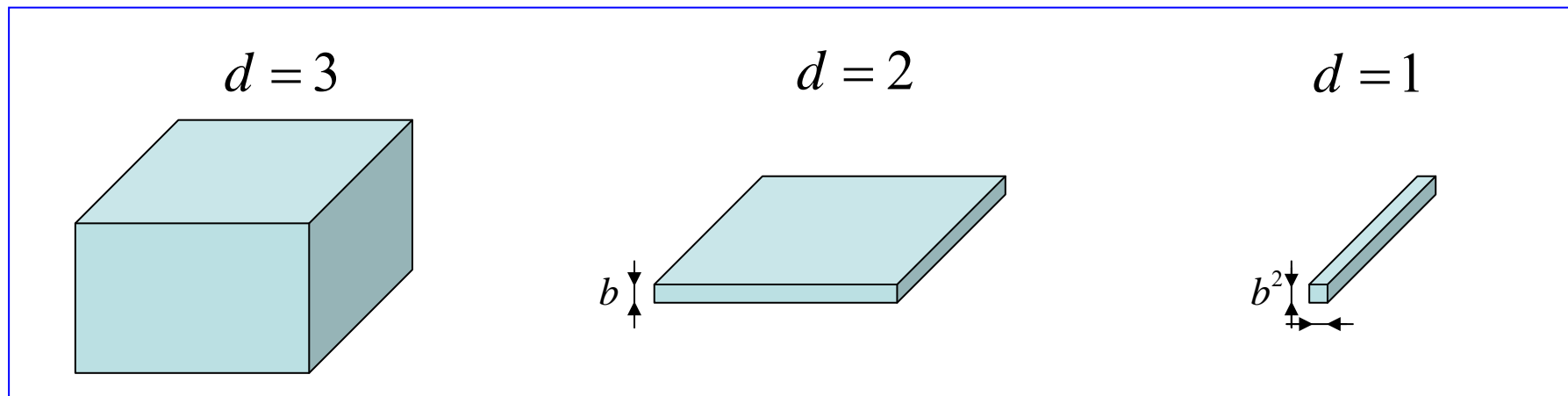
$$\xi(T) = \frac{\xi_0}{\sqrt{|\varepsilon|}} \quad \xi_0^2 = \frac{\hbar^2}{4m\alpha T_c} \quad \varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$E(\vec{p}) = \alpha(T - T_c) + \frac{\vec{p}^2}{4m} = \frac{1}{4m} \left[ \frac{\hbar^2}{\xi^2(T)} + \vec{p}^2 \right]$$

# Концентрация неравновесных куперовских пар

$$E(\vec{p}) = \alpha(T - T_c) + \frac{\vec{p}^2}{4m} = \frac{1}{4m} \left[ \frac{\hbar^2}{\xi^2(T)} + \vec{p}^2 \right]$$

$$n(\vec{p}) = \frac{1}{\exp\left[\frac{E(\vec{p})}{T}\right] - 1} \approx \frac{T}{E(\vec{p})} \sim \frac{mT}{p_0^2} \quad p_0 \sim \frac{\hbar}{\xi(T)}$$



$$n_s^{(d)} = b^{d-3} \int n(\vec{p}) \frac{d^{(d)} \vec{p}}{(2\pi\hbar)^d} \sim \frac{mTb^{d-3} \xi^2(T)}{\hbar^2} \frac{1}{\xi^d(T)} \sim \frac{mTb^{d-3} \xi_0^{2-d}}{\hbar^2} \varepsilon^{d/2-1}$$

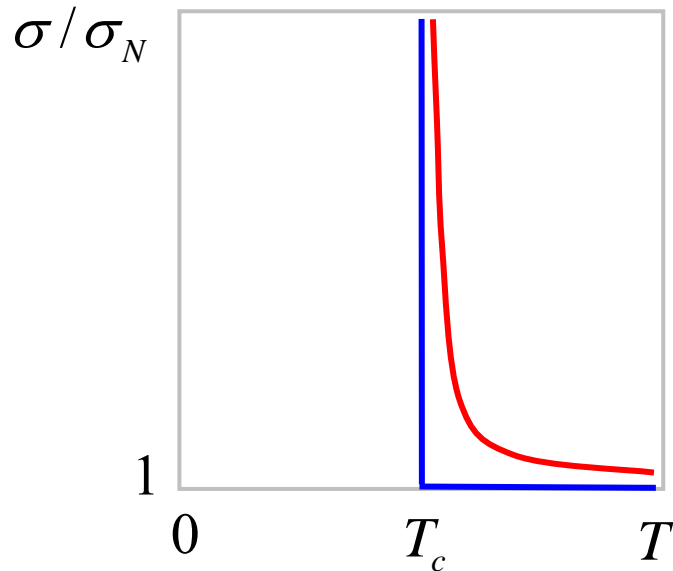
# Флуктуационная проводимость

$$\sigma_S = \frac{e^2 n_S \tau_S}{m}$$

$$n_S^{(d)} \sim \frac{m T b^{d-3} \xi_0^{2-d}}{\hbar^2} \varepsilon^{d/2-1}$$

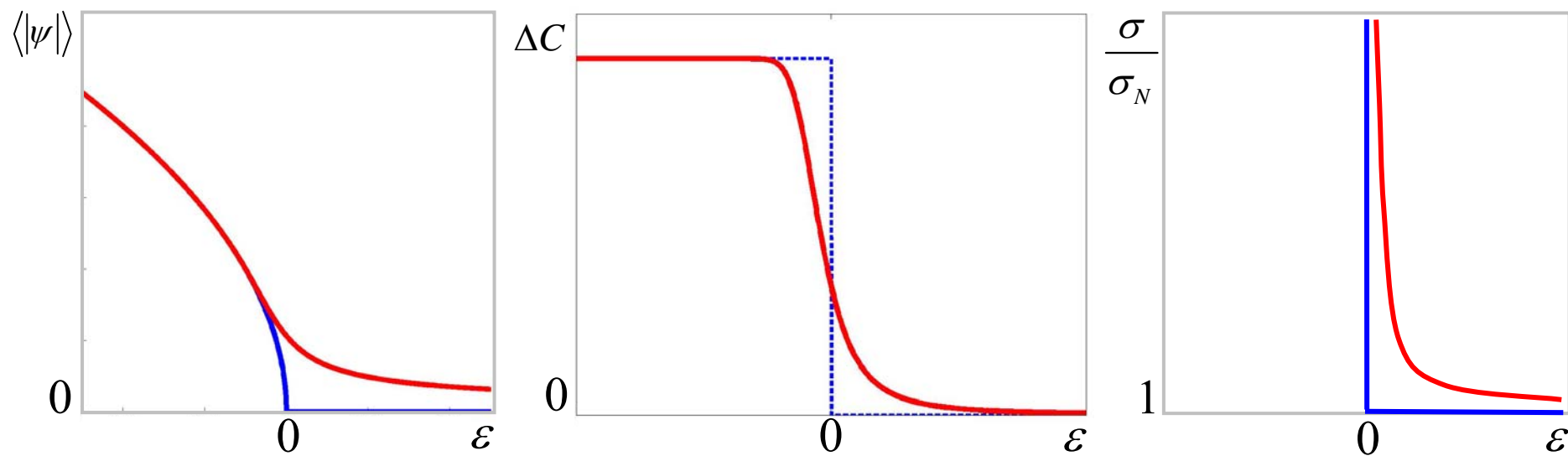
$$\tau_S \sim \frac{\hbar}{T_c \varepsilon} \Rightarrow$$

$$\sigma_S^{(d)} \sim \frac{e^2}{\hbar} b^{d-3} \xi_0^{2-d} \varepsilon^{d/2-2}$$



$$\sigma_S^{(d)} = \frac{e^2}{\hbar} \begin{cases} \frac{1}{32 \xi_0 \sqrt{\varepsilon}} & 3D - \text{объемный образец} \\ \frac{1}{16 b \varepsilon} & 2D - \text{пленка } (b \ll \xi_0) \\ \frac{\pi \xi_0}{16 b^2 \varepsilon^{3/2}} & 1D - \text{проволока } (b^2 \ll \xi_0^2) \end{cases}$$

# Заклучение



# Основополагающие теоретические работы

1. А.П. Леванюк, ЖЭТФ **36**, 810 (1959)
2. В.Л. Гинзбург, ФТТ **2**, 61 (1960)
3. В.В. Шмидт, Письма в ЖЭТФ **3**, 141 (1966)
4. В.В. Шмидт, In proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Low Temperature Physics **C2**, 205, Moscow (1967)
5. Л.Г. Асламазов, А.И. Ларкин, ФТТ **10**, 1104 (1968)
6. К. Маки, Progr. Theor. Phys. **39**, 897 (1968)
7. R.S. Thompson, Phys. Rev B **1**, 327 (1970)
8. C. Di Castro, C. Castellani, R. Raimondi and A.A. Varlamov, Phys. Rev., B **42**, 10211 (1990)

**Спасибо за внимание!**